УДК 539.374

В. В. Стружанов

АССОЦИИРОВАННЫЙ И ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫЙ ЗАКОНЫ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ДЛЯ СРЕД, ПРОЯВЛЯЮЩИХ ДЕФОРМАЦИОННОЕ РАЗУПРОЧНЕНИЕ

В теории пластического течения исследуется, как правило, только процесс упрочнения [1]–[3], хотя деформирование материала может привести к зависимости между напряжениями и деформациями, соответствующей разупрочнению, или так называемой падающей диаграмме [4]. Многие реальные материалы, такие, как горные породы, сыпучие тела и даже металлы, адекватно описываются именно моделями разупрочняющихся материалов.

В научной литературе периодически появляются публикации, в которых в той или иной степени затрагивается проблематика, касающаяся падающих ветвей диаграмм деформирования. Однако они в основном посвящены отдельным аспектом проблемы, например, построению частных моделей для решения конкретных задач [5],[6], исследованию устойчивости закритического деформирования [7],[8], разработке итерационных методов решения краевых задач с учетом разупрочнения [9]. Общетеоретическим же вопросам теории пластического течения с разупрочнением уделяется недостаточное внимание.

В данной работе в общей постановке исследуется вид предельных поверхностей, разделяющих области упругого и неупругого деформирования, как при упрочнении, так и при разупрочнении. Определена их выпуклость на всех стадиях деформирования при условии сохранения материалом упругих свойств, проявляемых при разгрузке. Показано, что тензор приращения пластических деформаций в данном случае всегда ортогонален к этим поверхностям в пространстве напряжений и, следовательно, ассоциированный закон течения справедлив и на стадии разупрочнения. Сравнение его с введенным более общим инкрементальным законом течения позволило установить, что точка догружения представляет собой угловую точку предельной поверхности.

1. Рассмотрим произвольное сложно-напряженное состояние элементарного материального объема, характеризуемое симметричными тензорами второго ранга напряжений σ и деформаций ε. Свойства материала на стадиях упругости и упрочнения (разупрочнения) описывают сим-

метричные тензоры четвертого ранга соответственно модулей упругости C и мгновенных (касательных) модулей C^p. Тензор C^p в общем случае зависит от мгновенных значений напряжений, деформаций, истории деформирования и направления последующего нагружения. Полагаем, что упругие свойства материала не зависят от пластических деформаций. Отсюда разгрузка всегда осуществляется по линейному закону и свойства материала на этой стадии характеризуются тензором C.

Известно [1], что тензор C положительно определен, т.е. $d\varepsilon\cdot\cdot C\cdot\cdot d\varepsilon > 0$, $d\varepsilon \neq 0$, где $C\cdot\cdot d\varepsilon$ — двойное скалярное произведение тензоров. На стадии упрочнения тензор C^p также положительно определен и выполняется постулат Друккера [1] об устойчивости деформирования ($d\sigma\cdot\cdot d\varepsilon > 0$, $d\sigma\cdot\cdot d\varepsilon^p > 0$). Здесь $d\sigma, d\varepsilon, d\varepsilon^p$ — соответственно приращения напряжений, полных и пластических деформаций.

В случае разупрочнения при активном нагружении всегда существует такой путь деформирования, на котором $d\varepsilon\cdot\cdot C^p\cdot\cdot d\varepsilon < 0$, т.е. нарушается постулат Друккера. Отсюда тензор C^p на этой стадии в общем случае знакопеременный.

2. Из определения разгрузки вытекает, что полный тензор деформаций однозначно представим в виде суммы $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$, где ε^e, ε^p — соответственно симметричные тензоры упругих и неупругих (пластических) деформаций. Тогда напряжения в упругопластической области можно выразить через деформации, используя обобщенный закон Гука, а именно

$$\sigma = C\cdot\cdot\varepsilon^e = C\cdot\cdot(\varepsilon - \varepsilon^p). \qquad (1)$$

Из выражения (1) вытекает, что приращение напряжений в общем случае равно

$$d\sigma = C\cdot\cdot(d\varepsilon - d\varepsilon^p). \qquad (2)$$

С другой стороны, справедливо инкрементальное соотношение [10]

$$d\sigma = C^p\cdot\cdot d\varepsilon. \qquad (3)$$

Приравнивая выражения (2) и (3), находим

$$d\varepsilon^p = (I - S\cdot\cdot C^p)\cdot\cdot d\varepsilon, \qquad (4)$$

где I — единичный тензор четвертого ранга; S — тензор модулей податливости ($S = C^{-1}$).

Обращая (3), получаем

$$d\varepsilon = S^p\cdot\cdot d\sigma, \qquad (5)$$

где S^p — тензор мгновенных модулей податливости ($S^p \cdot\cdot C^p = I$). Подставляя выражение (5) в формулу (4), получаем

$$d\varepsilon^p = (S^p - S) \cdot\cdot d\sigma. \tag{6}$$

Тензоры C^p и S^p в принципе можно определить как для упрочнения, так и для разупрочнения, поэтому формулы (4) и (6) представляют собой общий закон пластичности, описывающий кинетику формирования неупругих деформаций на всех стадиях деформирования. Этот закон назовем инкрементальным законом течения, так как в его выражения входят инкрементальные тензоры C^p и S^p.

Отметим, что при сохранении материалом изотропности, когда разупрочнение определяют только два параметра: $E^p < 0$ и $-1 < \nu^p < 0{,}5$, изотропный в данном случае тензор C^p является отрицательно определенным. Это следует из отрицательности нечетных и положительности четных главных миноров матрицы, отвечающей тензору C^p [11]. Здесь E^p, ν^p — соответственно мгновенные касательный модуль упругости и коэффициент поперечной деформации, получаемые из опыта на простое растяжение.

Введем еще тензор упрочнения (разупрочнения) H^p, определяющий связь между $d\sigma$ и $d\varepsilon^p$, а именно

$$d\sigma = H^p \cdot\cdot d\varepsilon^p.$$

Отсюда, обращая, имеем $d\varepsilon^p = Q^p \cdot\cdot d\sigma$ ($H^p \cdot\cdot Q^p = I$). Тогда

$$d\varepsilon^p = (S^p - S) \cdot\cdot d\sigma = (S^p - S) \cdot\cdot H^p \cdot\cdot d\varepsilon^p$$

и $Q^p = S^p - S$. Наконец, $C^p \cdot\cdot (S^p - S) \cdot\cdot H^p = C^p$ и $C^p = H^p \cdot\cdot (I + S \cdot\cdot H^p)^{-1}$.

Из постулата Друккера для устойчивых состояний материала получаем

$$d\sigma \cdot\cdot d\varepsilon^p = d\sigma \cdot\cdot Q^p \cdot\cdot d\sigma = d\varepsilon^p \cdot\cdot H^p \cdot\cdot d\varepsilon^p > 0.$$

Следовательно, тензоры H^p и Q^p положительно определены на стадии упрочнения. Когда постулат Друккера не выполняется и состояние материала неустойчивое ($d\sigma \cdot\cdot d\varepsilon^p < 0$), то тензоры H^p и Q^p отрицательно определены (разупрочнение).

3. Более общий по сравнению с постулатом Друккера постулат пластичности А. А. Ильюшина [12] о положительности работы, совершаемой напряжениями на замкнутом по деформациям циклам нагружения, приводит к выражению

$$d\varepsilon \cdot\cdot (C - C^p) \cdot\cdot d\varepsilon > 0 \tag{7}$$

для произвольного тензора C^p. Следовательно, тензор $C - C^p$ является положительно определенным на всех стадиях деформирования.

Произведем теперь операцию двойного скалярного произведения обоих частей равенства (4) на тензор $C \cdot \cdot d\varepsilon$. В результате находим, что

$$d\varepsilon \cdot \cdot C \cdot \cdot d\varepsilon^p = d\varepsilon \cdot \cdot (C - C^p) \cdot \cdot d\varepsilon > 0. \tag{8}$$

Отсюда можно заключить, что угол между векторами $d\varepsilon$ и $C \cdot \cdot d\varepsilon^p$ в шестимерном пространстве деформаций всегда острый. Здесь и в дальнейшем будем использовать векторный язык, ведя разговор о тензорах. В силу очевидного неравенства $d\varepsilon^p \cdot \cdot C \cdot \cdot d\varepsilon^p > 0$, получаем острый угол и между $d\varepsilon^p$ и $C \cdot \cdot d\varepsilon^p$, а также, используя равенство (4), имеем $d\varepsilon \cdot \cdot (I - S \cdot \cdot C^p) \cdot \cdot C \cdot \cdot (I - S \cdot \cdot C^p) \cdot \cdot d\varepsilon > 0$. Таким образом, тензор $(I - S \cdot \cdot C^p) \cdot \cdot (C - C^P)$ обладает свойством положительной определенности.

Далее, тензор $(I - S \cdot \cdot C^p) = S \cdot \cdot (C - C^P)$ является двойным скалярным произведением положительно определенных тензоров S и $C - C^p$. Известно [11], что результирующий тензор будет положительно определенным тогда и только тогда, когда сомножители коммутируют. Это выполняется, если тензоры S, C, C^P будут изотропными. Итак, для изотропных тензоров $d\varepsilon \cdot \cdot (I - S \cdot \cdot C^p) \cdot \cdot d\varepsilon > 0$, или, вспоминая равенство (4), $d\varepsilon \cdot \cdot d\varepsilon^p > 0$. Следовательно, угол между векторами $d\varepsilon$ и $d\varepsilon^p$ при сохранении материалом изотропности всегда острый.

Введем предельную поверхность в пространстве деформаций, уравнение которой имеет вид $\Phi(\varepsilon_{ij}) = 0$, где ε_{ij} — компоненты тензора ε $(i, j = 1, 2, 3)$. Если тензору полной деформации отвечает некоторая точка на поверхности $\Phi = 0$, то при любом догружении, которое определяется вектором $d\varepsilon$, исходящим из этой точки в направлении от поверхности, начинается процесс образования неупругих деформаций.

В силу произвольности $d\varepsilon^p$ и C^p неравенство (8) справедливо, если поверхность $\Phi = 0$ выпуклая, а вектор $C \cdot \cdot d\varepsilon^p$ ортогонален ей. Тогда угол между $C \cdot \cdot d\varepsilon^p$ и вектором ε^e, исходящим из центра предельной поверхности, где упругие деформации равны нулю, в точку, являющуюся началом векторов $d\varepsilon$ и $C \cdot \cdot d\varepsilon^p$, должен быть острым, т.е. $\varepsilon^e \cdot \cdot C \cdot \cdot d\varepsilon^p > 0$. Тогда

$$\sigma \cdot \cdot d\varepsilon^p > 0. \tag{9}$$

Очевидно, что данное неравенство справедливо на всех стадиях деформирования.

Произведение $\sigma \cdot \cdot d\varepsilon^p$ представляет собой для данной модели так называемое некомпенсированное тепло [13]. Поэтому неравенство (9) показывает, что процесс деформирования, включающий и стадию разупрочнения, не противоречит законам термодинамики.

Итак, множество тензоров деформаций $M_\varepsilon \{\varepsilon : \Phi(\varepsilon) < 0\}$ является выпуклым. Сдвиг M_ε на ε^p (т.е. множество $M_\varepsilon^e = M_\varepsilon - \varepsilon^p$), где ε^p — фиксированный тензор неупругих деформаций, образовавшихся к данному моменту при деформировании по некоторому пути, — также выпуклое множество. Посредством линейного преобразования $C \cdot \cdot \varepsilon^e = \sigma$ множество M_ε^e отображается в множество M_σ шестимерного пространства напряжений, а поверхность $\Phi = 0$ — в поверхность $f(\sigma) = 0$, называемую поверхностью нагружения. Так как тензор C осуществляет взаимно однозначное отображение, то множество M_σ должно быть выпуклым. Отсюда поверхность $f = 0$ также выпуклая.

Рассматривая теперь неравенство (9) в пространстве напряжений, где σ — вектор, исходящий из центра поверхности нагружения в ту ее точку (точку догружения), из которой исходит вектор $d\varepsilon^p$, находим, что угол между ними всегда острый. Следовательно, вектор $d\varepsilon^p$ ортогонален поверхности $f = 0$.

Таким образом, свойство градиентальности справедливо на всех стадиях деформирования.

4. Определим активное нагружение, разгрузку и нейтральное нагружение как для упрочнения, так и для разупрочнения. Рассмотрим эти процессы сначала в пространстве деформаций. Очевидно, что при активном деформировании вектор $d\varepsilon$ направлен вовне предельной поверхности, т.е. $N_\varepsilon \cdot \cdot d\varepsilon > 0$. Кроме того, $d\varepsilon^p \neq 0$ и $N_\varepsilon \cdot \cdot d\varepsilon^p > 0$. Здесь N_ε — симметричный тензор второго ранга с компонентами $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}$, задающий внешнюю нормаль к поверхности $\Phi = 0$. При этом возможны два варианта, а именно $N_\varepsilon \cdot \cdot d\varepsilon^e > 0$ — упрочнение ($d\varepsilon^e \cdot \cdot C \cdot \cdot d\varepsilon^p > 0$) и $N_\varepsilon \cdot \cdot d\varepsilon^e < 0$ — разупрочнение ($d\varepsilon^e \cdot \cdot C \cdot \cdot d\varepsilon^p < 0$), когда вектор $d\varepsilon^e$ составляет с вектором $C \cdot \cdot d\varepsilon^p$ тупой угол и, следовательно, направлен внутрь предельной поверхности (упругая деформация материала уменьшается).

Разгрузка отвечает неравенствам $N_\varepsilon \cdot \cdot d\varepsilon < 0$, $N_\varepsilon \cdot \cdot d\varepsilon^e < 0$. Кроме того, $d\varepsilon^p = 0$. Для нейтрального нагружения имеем $N_\varepsilon \cdot \cdot d\varepsilon = 0$, $N_\varepsilon \cdot \cdot d\varepsilon^e = 0$, $d\varepsilon^p = 0$.

Отметим, что при активном деформировании предельная поверхность движется в направлении вектора $d\varepsilon$, в общем случае изменяя свою конфигурацию, причем после догружения конец вектора $d\varepsilon$ лежит на уже измененной предельной поверхности.

В пространстве напряжений нейтральное нагружение определяется равенством $N_\sigma \cdot \cdot d\sigma = 0$, где N_σ — симметричный тензор второго ранга с компонентами $\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$, задающий внешнюю нормаль к поверхности $f = 0$. При разгрузке $N_\sigma \cdot \cdot d\sigma < 0$ и вектор $d\sigma$ направлен внутрь поверхности нагружения. Кроме того, поверхность нагружения не изменяется и $d\varepsilon^p = 0$.

Активному нагружению в случае упрочнения соответствует неравенство $N_\sigma \cdot \cdot d\sigma > 0$. Если имеет место разупрочнение, то $N_\sigma \cdot \cdot d\sigma < 0$. Этот случай отличается от разгрузки тем, что поверхность нагружения изменяется и $d\varepsilon^p \neq 0$.

При активном деформировании поверхность движется в направлении вектора $d\sigma$, в общем случае изменяя свою конфигурацию, и конец вектора $d\sigma$ лежит на измененной поверхности нагружения.

Наконец, в случае разупрочнения поверхность нагружения разделяет область разрушения и область, в которой материал сохраняет сплошность, так как сохранение материалом, по крайней мере, ограниченной несущей способности возможно только при тех нагружениях, когда вектор $d\sigma$ направлен вовнутрь поверхности.

5. В силу ортогональности вектора $d\varepsilon^p$ к поверхности $f = 0$ справедлив ассоциированный закон течения [1]

$$d\varepsilon^p = k_\sigma N_\sigma N_\sigma \cdot \cdot d\sigma, \tag{10}$$

где диадное произведение тензоров $N_\sigma N_\sigma$ представляет собой симметричный тензор четвертого ранга. Аналогично в пространстве деформаций

$$C \cdot \cdot d\varepsilon^p = k_\varepsilon N_\varepsilon N_\varepsilon \cdot \cdot d\varepsilon. \tag{11}$$

Здесь параметры k_σ, k_ε могут быть скалярными функциями напряжений и деформаций или функционалами от пути нагружения. Подставляя в выражение (10) формулу (6), а в (11) — формулу (4), получаем

$$S^p - S = k_\sigma N_\sigma N_\sigma, \tag{12}$$

$$C - C^p = k_\varepsilon N_\varepsilon N_\varepsilon. \tag{13}$$

В дальнейшем будем считать тензоры $S^p - S$ и $C - C^p$ изотропными.

Диадное произведение NN двух одинаковых симметричных тензоров второго ранга не может дать в результате изотропный тензор четвертого ранга. Действительно, для изотропности результирующего тензора необходимо, чтобы компоненты тензора N удовлетворяли следующим условиям: $N_{ij}N_{mn}=0$ при $i=j$, $m\neq n$; $N_{ij}N_{mn}\neq 0$ при $i=j$, $m=n$ и $N_{ij}N_{mn}=0$ при $i\neq j$, $m\neq n$, $i=m$, $j=n$ $(i,j,m,n=1,2,3)$. Очевидно, что данные условия несовместимы. Следовательно, для гладких предельных поверхностей, когда в точке догружения имеется только один вектор внешней нормали, равенства (12) и (13) не выполняются.

Данное противоречие может быть разрешено только следующим образом. Разложим тензор S^p-S на сумму семи диадных произведений симметричных тензоров второго ранга:

$$S^p-S=\frac{1}{3}m\Lambda\Lambda+n\sum_{i=1}^{3}\Lambda_{ii}\Lambda_{ii}+\frac{1}{2}n(\Lambda_{12}\Lambda_{12}+\Lambda_{13}\Lambda_{13}+\Lambda_{23}\Lambda_{23}),$$

где Λ — единичный тензор; Λ_{ii} — тензор, у которого имеется только одна ненулевая компонента $\lambda_{ii}=1$; Λ_{ij} — тензор, имеющий ненулевые компоненты $\lambda_{ij}=\lambda_{ij}=1$, $n=(G-G^p)(2GG^p)^{-1}$, $m=(K-K^p)(KK^p)^{-1}-n$. Здесь G, K — модуль сдвига и объемный модуль в области упругости, G^p, K^p — соответствующие мгновенные модули в области упрочнения (разупрочнения), $G=E/2(1+\nu)$, $G^p=E^p/2(1+\nu^p)$, $K=E/(1-2\nu)$, $K^p=E^p/(1-2\nu^p)$, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Вспоминая теперь формулу (6), находим, что тензор $d\varepsilon^p$ является суммой семи тензоров.

Такое же представление тензора $d\varepsilon^p$ можно получить, если точка нагружения, из которой исходит вектор $d\sigma$, будет угловой точкой поверхности нагружения, образованной пересечением семи поверхностей-плоскостей

$$f_0=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}-k_0=0,\quad f_i=\sigma_{ii}-k_i=0\ (i=1,2,3),$$

$$f_4=\sigma_{12}-k_4=0,\ f_5=\sigma_{13}-k_5=0,\ f_6=\sigma_{23}-k_6=0,$$

а параметр k_σ для этих поверхностей принимает значения $k_{\sigma 0}=m/3$, $k_{\sigma i}=n$, $k_{\sigma 4}=k_{\sigma 5}=k_{\sigma 6}=n/2$. Здесь k_0,k_j $(j=1,\ldots,6)$ суть некоторые физические параметры материала, причем $k_0=k_1+k_2+k_3$. Поверхность f_0 представляет собой октаэдрическую плоскость, равнонаклоненную к осям, на которых откладываются значения $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33}$.

Действительно, используя обобщенный ассоциированный закон [1], справедливый для предельных поверхностей с угловыми точками, получаем тензор $d\varepsilon^p$, который имеет семь составляющих, определяемых по формуле (10) для каждой поверхности. Так как $N_{\sigma 0}=\Lambda$, $N_{\sigma i}=\Lambda_{ii}$,

$N_{\sigma 4} = \Lambda_{12}$, $N_{\sigma 5} = \Lambda_{13}$, $N_{\sigma 6} = \Lambda_{23}$, то тензор $d\varepsilon^p$ представляется суммой тех же семи тензоров, что и ранее.

Аналогично равенство (13) выполняется, когда тензор $C - C^p$ разлагается на сумму

$$C - C^p = \frac{1}{3}p\Lambda\Lambda + q\sum_{i=1}^{3}\Lambda_{ii}\Lambda_{ii} + \frac{1}{2}q(\Lambda_{12}\Lambda_{12} + \Lambda_{13}\Lambda_{13} + \Lambda_{23}\Lambda_{23}),$$

где $q = 2(G - G^p)$, $p = (K - K^p) - q$, а точка нагружения в пространстве деформаций, из которой исходит вектор $d\varepsilon$, является угловой точкой предельной поверхности, образованной пересечением семи поверхностей-плоскостей

$$\Phi_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - k_0' = 0,\ \Phi_i = \varepsilon_{ii} - k_i' = 0,\ (i = 1, 2, 3),$$

$$\Phi_4 = \varepsilon_{12} - k_4' = 0,\ \Phi_5 = \varepsilon_{13} - k_5' = 0,\ \Phi_6 = \varepsilon_{23} - k_6' = 0,$$

где k_0', k_i' $(i = 1, \ldots, 6)$ — физические параметры, $k_0' = k_1' + k_2' + k_3'$. При этом параметр k_ε для этих поверхностей принимает значения $k_{\varepsilon 0} = p/3$, $k_{\varepsilon i} = q$, $k_{\varepsilon 4} = k_{\varepsilon 5} = k_{\varepsilon 6} = q/2$.

Таким образом, вектор $d\varepsilon^p$ является суммой семи векторов, ортогональных соответствующим поверхностям-плоскостям, и расположен внутри пирамидального конуса, образованного нормалями, восстановленными в угловой точке к каждой поверхности. Аналогично расположен в пространстве деформаций и вектор $C \cdot \cdot d\varepsilon^p$.

Отметим, что данные выводы согласуются с экспериментальными результатами, изложенными в работе [14].

Примечание. Так как упругие свойства материала не изменяются, то при разгрузке предельная поверхность восстанавливает свою регулярность [14] и приобретает форму начальной поверхности текучести с соответствующими изменениями, связанными с характером упрочнения или разупрочнения (изотропным или трансляционным).

6. Рассмотрим, наконец, тензоры Λ_{11}, Λ_{22}, Λ_{33}, $\Lambda_{12}/\sqrt{2}$, $\Lambda_{13}/\sqrt{2}$, $\Lambda_{23}/\sqrt{2}$. Они попарно ортогональны (двойное скалярное произведение равно нулю), а двойная свертка каждого из них с самим собой равна единице. Каждый симметричный тензор второго ранга можно представить шестимерным вектором, а двойное скалярное произведение тензоров заменить простым скалярным произведением шестимерных векторов. Тогда упомянутые тензоры как векторы являются единичными ортами шестимерного декартова пространства.

Отобразим данные орты посредством линейного оператора, заданного изотропным тензором S, в пространство деформаций. Получим шесть тензоров a_j $(j = 1, \ldots, 6)$, причем $a_1 = S \cdot\cdot \Lambda_{11}$ и т.д. Эти тензоры обладают следующими свойствами:

$$a_m \cdot\cdot a_n = \nu(\nu - 2)/E^2 \ (m, n = 1, 2, 3, \ m \neq n);$$
$$a_m \cdot\cdot a_n = 0, \ (m = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ n = 4, 5, 6, \ m \neq n);$$
$$a_m \cdot\cdot a_m = (1 + 2\nu^2)/E^2, \ (m = 1, 2, 3,);$$
$$a_n \cdot\cdot a_n = (1 + \nu)^2/E^2, \ (n = 4, 5, 6).$$

Таким образом, единичные орты, рассматриваемые в пространстве напряжений, преобразуются в векторы (тензоры), имеющие меньшую длину и тупой угол между векторами a_m и a_n при $m, n = 1, 2, 3$, $m \neq n$.

Если единичные орты из пространства деформаций отобразить посредством изотропного тензора C в пространство напряжений, то получаем шесть тензоров b_j $(j = 1, \ldots, 6)$, которые обладают свойствами:

$$b_m \cdot\cdot b_n = \nu E^2(2 - \nu)/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]^2 \ (m, n = 1, 2, 3, \ m \neq n);$$
$$b_m \cdot\cdot b_m = E^2(1 - 2\nu + 3\nu^2)/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]^2, \ (m = 1, 2, 3);$$
$$b_m \cdot\cdot b_n = 0, \ (m = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ n = 4, 5, 6, \ m \neq n);$$
$$b_n \cdot\cdot b_n = E^2/(1 + \nu)^2, \ (n = 4, 5, 6).$$

Таким образом, единичные орты пространства деформаций преобразуются в векторы, имеющие большую длину и острый угол между векторами b_m и b_n $(m, n = 1, 2, 3, m \neq n)$.

Отметим, что отображение без изменения углов осуществляется лишь при условии $\nu = 0$.

Непосредственно проверяется факт нарушения ортогональности тензоров после их отображения. Если в пространстве напряжений $\Lambda_{11} \cdot\cdot \sigma = 0$, то $(S \cdot\cdot \Lambda_{11}) \cdot\cdot (S \cdot\cdot \sigma) \neq 0$. Если в пространстве деформаций $\Lambda_{11} \cdot\cdot \varepsilon = 0$, то $(C \cdot\cdot \Lambda_{11}) \cdot\cdot (C \cdot\cdot \varepsilon) \neq 0$. Однако, как и следовало ожидать, $a_1 \cdot\cdot (C \cdot\cdot \sigma) = S \cdot\cdot \Lambda_{11} \cdot\cdot C \cdot\cdot \sigma = \Lambda_{11} \cdot\cdot \sigma = 0$. Аналогично $b_1 \cdot\cdot (S \cdot\cdot \varepsilon) = \Lambda_{11} \cdot\cdot \varepsilon = 0$. Далее поверхности-плоскости f_i, параллельные координатным плоскостям в пространстве напряжений, при отображении в пространство деформаций преобразуются в поверхности Φ_i, параллельные плоскостям, образованным векторами a_j. При этом угловая точка на поверхности нагружения переходит в угловую точку предельной поверхности, которая является пересечением уже не перпендикулярных плоскостей. Теперь, если некоторый вектор $d\varepsilon_i^p$ ортогонален поверхности f_i, то из рассуждений, приведенных выше, вытекает, что в пространстве деформаций к поверхности Φ_i будет ортогонален вектор $C \cdot \cdot d\varepsilon_i^p$.

Таким образом, установленная выше в п.3 связь между ортогональными векторами (тензорами) к поверхности нагружения и к предельной поверхности является следствием особенностей отображения пространств напряжений и деформаций друг в друга.

Литература

1. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971.
2. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.:Машиностроение, 1990.
3. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.:Мир, 1979.
4. Никитин Л.В. Направления развития моделей упруговязкопластических тел // Механика и научно-технический прогресс. Т.3: Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. С.136–153.
5. Ибрагимов В.А., Клюшников В.Д. Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1971. Т.6, №4. С.116–121.
6. Вильдеман В.Э., Ташкинов А.А. Расчет несущей способности толстостенных труб с использованием полных диаграмм деформирования // Пробл. прочности. 1994. Т.26, №8. С.48–54.
7. Линьков А.М. Об условиях устойчивости в механике разрушения // Докл. АН СССР. 1977. Т.233, №1. С.45–48.
8. Рыжак Е.И. Об устойчивом закритическом деформировании упругопластических образцов, стесненных обоймой конечной жесткости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. Т.30, №3. С.117–135.
9. Стружанов В.В., Миронов В.И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995.
10. Аннин Б.Д. Механика деформируемого твердого тела в СО РАН в 1988–1997 гг. // Жури. прикл. механики и техн. физики. 1997. Т.38, №4. С.28–45.
11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.:Мир, 1989.
12. Ильюшин А.А. Пластичность. М.:Изд-во АН СССР, 1963.
13. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.:Наука, 1970. Т.2.
14. Шевченко Ю.Н. К построению поверхности нагружения в теории пластичности // Прикладная механика. 1996. Т.32, №11. С.31–37.

Статья поступила 26.11.1997 г.;
окончательный вариант 31.03.1998 г.